dev : décomposition LU. → voir timing + blabla L162

Leçons : 157, 162, 154.
ref : Caldero - Voyage en Algébrie p 78

89 **thm** : $A \in GL_n(\mathbb{R})$. $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ne sont pas nuls $\Leftrightarrow$ $A = LU$ {L triang. inf unipotente ; 1 sur diag / U triang sup}

dem :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$] Montrons le par récurrence.

ini : $n=1$ $A = (a_{11}) = (1)(a_{11})$

hér : Supposons le résultat acquis pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons le pour $n = k+1$.

$$A = \begin{pmatrix} A_k & y \\ x & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux de A_k sont aussi mineurs de A donc non nuls

Par HR, A_k admet une décomposition LU : $A_k = L_k U_k$.

car de plus $|A_k| = \Delta_k \neq 0$

On a de plus : $\underbrace{\det(A_k)}_{\neq 0} = \underbrace{\det(L_k)}_{=1} \det(U_k)$ donc $\det(U_k) \neq 0$.

On a donc L_k, U_k inversible et :

$$A = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ xU_k^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & L_k^{-1}y \\ 0 & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$ remplir au fur et à mesure en expliquant

On en conclut par récurrence.

$\Leftarrow$] Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On réécrit $A = LU$:

$$\begin{pmatrix} A_k & Y_k \\ X_k & Z_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ M_k & L_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & N_k \\ 0 & U_{n-k} \end{pmatrix}.$$

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(U) \neq 0$.

On a donc $\det(L_k) = 1$ et $\det(U_k) \neq 0$ donc $\det(A_k) \neq 0$.

prop : 1) Cette décomposition est unique

2) la diagonale principale de U est $\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$.

dem :

2' 1) Supposons $A = LU$ et $A = L'U'$.

On a donc $L'^{-1}L = U'U^{-1}$ matrice triangulaire supérieure ET inférieure de diagonale 1.

Ainsi $L'^{-1}L = U'U^{-1} = I$ donc $L = L'$ et $U' = U$.

L162 2). $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\Delta_k = \det(A_k) = \det(U_k)$

$k=1 \rightsquigarrow u_1 = \Delta_1$

$k=2 \rightsquigarrow u_2 \Delta_1 = \Delta_2$ $u_2 = \Delta_2 / \Delta_1$

etc.

admettre déc LD^tL.

thm : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ il existe B triangulaire supérieure inversible, $A = {}^tBB$

dem :

$\Rightarrow$] Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ses v.p. sont strictement positifs donc les coeffs d_i de sa matrice D de sa décomposition LD^tL

On peut donc poser : $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$

et $A = LD'D'^tL = (LD')^t(LD')$ avec LD' triangulaire inf.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A = B\,{}^tB$.
$\forall x \in \mathbb{R}_n \setminus \{0\}$ $\quad \langle Ax, x\rangle = \langle B\,{}^tBx, x\rangle = \langle {}^tBx, {}^tBx\rangle > 0$ car B est inversible car $B \neq 0$

L 162 : $\quad AX = B$.

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A = LU$

$LUX = B$

① $LY = B \rightsquigarrow$ $y_1 = b_1$
$l_1 y_1 + y_2 = b_2 \rightsquigarrow y_2 = b_2 - l_1 y_1$
etc.

② $Y = UX \rightsquigarrow y_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n \qquad x_n = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n$

$y_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} x_{n-1} + u_{n-1,n} x_n$

$\rightsquigarrow x_{n-1} = \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}\left(y_{n-1} - u_{n-1,n} \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n\right)$